به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۳

معادلات خطی و فضاهای برداری | **تمرین تئوری اول** | تاریخ انتشار: ۱ اسفند ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۱ اسفند ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۳۰ نمره)

(آ) (۱۵ نمره) معادله زیر را به فرم ماتریس افزایش یافته[۱] بنویسید و سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی[۲] و تشکیل فرم کاهش یافته سطری پلکانی[۳] دستگاه معادله را حل کنید. (حل معادلات بدون استفاده از روش یاد شده نمره‌ای نخواهد داشت.)

$$\begin{aligned} ۳x - ۶y + z + ۲t &= -۴ \\ ۴x - ۲y - z - ۲t &= -۳ \\ ۹x + ۶y - z - ۸t &= ۵ \\ ۶x + ۳y + z + ۳t &= ۸ \end{aligned}$$

(ب) (۱۵ نمره) معکوس ماتریس زیر را با کمک ماتریس افزایش یافته $[\,A \mid I\,]$ بدست آورده و ماتریس‌های سطری مقدماتی[۴] استفاده شده را بنویسید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۸ & ۹ & ۴ \\ ۷ & ۶ & ۵ \end{bmatrix}$$

پاسخ

(آ) ابتدا ماتریس افزایش‌یافته را تشکیل می‌دهیم و سپس با کمک عملیات سطری مقدماتی، فرم کاهش‌یافته سطری پلکانی آن را پیدا می‌کنیم.
ماتریس افزایش‌یافته:

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۱ & ۲ & -۴ \\ ۴ & -۲ & -۱ & -۲ & -۳ \\ ۹ & ۶ & -۱ & -۸ & ۵ \\ ۶ & ۳ & ۱ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}$$

سپس به ترتیب عملیات سطری مقدماتی زیر برای تشکیل ستون اول را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} R_۱ &= \frac{R_۱}{۳} \\ R_۲ &= R_۲ - ۴R_۱ \\ R_۳ &= R_۳ - ۹R_۱ \\ R_۴ &= R_۴ - ۶R_۱ \end{aligned}$$

بدین ترتیب به ماتریس زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & -\frac{۴}{۳} \\ ۰ & ۶ & -\frac{۷}{۳} & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۷}{۳} \\ ۰ & ۲۴ & -۴ & -۱۴ & ۱۷ \\ ۰ & ۱۵ & -۱ & -۱ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

سپس به ترتیب عملیات سطری مقدماتی زیر برای تشکیل ستون دوم را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} R_۲ &= \frac{R_۲}{۶} \\ R_۱ &= R_۱ + ۲R_۲ \\ R_۳ &= R_۳ - ۲۴R_۲ \\ R_۴ &= R_۴ - ۱۵R_۲ \end{aligned}$$

بدین ترتیب به ماتریس زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۴}{۹} & -\frac{۸}{۹} & -\frac{۵}{۹} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۷}{۱۸} & -\frac{۷}{۹} & \frac{۷}{۱۸} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۶}{۳} & \frac{۱۴}{۳} & \frac{۲۳}{۳} \\ ۰ & ۰ & \frac{۲۹}{۶} & \frac{۳۲}{۳} & \frac{۶۱}{۶} \end{bmatrix}$$

---

[۱] Augmented Matrix
[۲] Elementary Row Operations
[۳] Row Reduced Echelon Form
[۴] Elementary Row Matrices

سپس به ترتیب عملیات سطری مقدماتی زیر برای تشکیل ستون سوم را انجام می‌دهیم:

$$R_۳ = \frac{۳R_۳}{۱۶}$$
$$R_۱ = R_۱ + \frac{۴R_۳}{۹}$$
$$R_۲ = R_۲ + \frac{۷R_۳}{۱۸}$$
$$R_۴ = R_۴ - \frac{۲۹R_۳}{۶}$$

بدین ترتیب به ماتریس زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۱۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ & -\frac{۷}{۱۶} & \frac{۹۱}{۹۶} \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۷}{۸} & \frac{۲۳}{۱۶} \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱۰۳}{۱۶} & \frac{۱۰۳}{۳۲} \end{bmatrix}$$

سپس به ترتیب عملیات سطری مقدماتی زیر برای تشکیل ستون چهارم را انجام می‌دهیم:

$$R_۴ = \frac{۱۶R_۴}{۱۰۳}$$
$$R_۱ = R_۱ + \frac{R_۴}{۲}$$
$$R_۲ = R_۲ + \frac{۷R_۴}{۱۶}$$
$$R_۳ = R_۳ - \frac{۷R_۴}{۸}$$

بدین ترتیب به ماتریس زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۷}{۶} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

که فرم کاهش‌یافته سطری پلکانی ماتریس اولیه می‌باشد. بدین ترتیب معادله حل می‌شود و مقادیر زیر بعنوان جواب مجهولات بدست می‌آید. دقت کنید که راه‌های مختلفی برای رسیدن به فرم کاهش‌یافته سطری پلکانی یک ماتریس وجود دارد و هر راهی که استفاده کنید، همانند روش گاوس جردن، درست می‌باشد.

$$x = \frac{۱}{۳} \qquad y = \frac{۷}{۶} \qquad z = ۱ \qquad t = \frac{۱}{۲}$$

(ب) ابتدا ماتریس افزایش‌یافته را تشکیل می دهیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۸ & ۹ & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۷ & ۶ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

با انجام عملیات سطری مقدماتی روی این ماتریس به گونه‌ای که طرف چپ آن معادل I بشود، عملا داریم کل ماتریس افزایش‌یافته را در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم که باعث می‌شود طرف چپ ماتریس افزایش‌یافته از A به I تبدیل شود و طرف راست ماتریس افزایش‌یافته از I به $A^{-۱}$ تبدیل شود. پس اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد (یعنی RREF آن I باشد)، با تشکیل RREF ماتریس افزایش‌یافته $[\, A \mid I \,]$ می‌توانیم وارون A را پیدا کنیم.

خواست دیگر سوال پیدا کردن ماتریس‌های سطری مقدماتی می‌باشد. این کار را به سادگی می‌توانیم با اعمال عملیات سطری مقدماتی هر مرحله روی ماتریس همانی یا I انجام دهیم.

به ترتیب عملیات سطری مقدماتی زیر و ماتریس سطری مقدماتی متناظر با آن‌ها را در زیر انجام می‌دهیم:

$$R_۲ = R_۲ - ۸R_۱ \tag{۱}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۸ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

عملیات (۱) ماتریس افزایش‌یافته را به ماتریس زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۷ & -۲۰ & -۸ & ۱ & ۰ \\ ۷ & ۶ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$R_۳ = R_۳ - ۷R_۱ \qquad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۷ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

عملیات (۲) ماتریس افزایش‌یافته را به ماتریس زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۷ & -۲۰ & -۸ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۸ & -۱۶ & -۷ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$R_۲ = -\frac{R_۲}{۷} \qquad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

عملیات (۳) ماتریس افزایش‌یافته را به ماتریس زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۲۰}{۷} & \frac{۸}{۷} & -\frac{۱}{۷} & ۰ \\ ۰ & -۸ & -۱۶ & -۷ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$R_۱ = R_۱ - ۲R_۲ \qquad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

عملیات (۴) ماتریس افزایش‌یافته را به ماتریس زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۱۹}{۷} & -\frac{۹}{۷} & \frac{۲}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۲۰}{۷} & \frac{۸}{۷} & -\frac{۱}{۷} & ۰ \\ ۰ & -۸ & -۱۶ & -۷ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$R_۳ = R_۳ + ۸R_۲ \qquad (۵)$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۸ & ۱ \end{bmatrix}$$

عملیات (۵) ماتریس افزایش‌یافته را به ماتریس زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۱۹}{۷} & -\frac{۹}{۷} & \frac{۲}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۲۰}{۷} & \frac{۸}{۷} & -\frac{۱}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۴۸}{۷} & \frac{۱۵}{۷} & -\frac{۸}{۷} & ۱ \end{bmatrix}$$

$$R_۳ = \frac{۷R_۳}{۴۸} \qquad (۶)$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۷}{۴۸} \end{bmatrix}$$

عملیات (۶) ماتریس افزایش‌یافته را به ماتریس زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۱۹}{۷} & -\frac{۹}{۷} & \frac{۲}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۲۰}{۷} & \frac{۸}{۷} & -\frac{۱}{۷} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۵}{۱۶} & -\frac{۱}{۶} & \frac{۷}{۴۸} \end{bmatrix}$$

$$R_۱ = R_۱ + \frac{۱۹R_۳}{۷} \qquad (۷)$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱۹}{۷} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

عملیات (۷) ماتریس افزایش‌یافته را به ماتریس زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{19}{48} \\ 0 & 1 & \frac{20}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{48} \end{bmatrix}$$

$$R_2 = R_2 - \frac{20R_3}{7} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عملیات (۸) ماتریس افزایش‌یافته را به ماتریس زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{19}{48} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{48} \end{bmatrix}$$

با استفاده از این عملیات، ماتریس افزایش‌یافته به $[\ I \mid A^{-1}\ ]$ تبدیل شد و وارون A را پیدا کردیم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{19}{48} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ \frac{5}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{48} \end{bmatrix}$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره) مجموعه تمام توابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را با $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ نشان می‌دهیم. تابعی متناوب با دوره تناوب T است که $f(x) = f(x+T)$ برقرار باشد. مجموعه تمام توابع فرد را با f_o نشان می‌دهیم که داریم $(f_o(x) = -f_o(-x))$ و مجموعه تمام توابع زوج را با f_e نشان می‌دهیم که داریم $(f_e(x) = f_e(-x))$. موارد زیر را ثابت یا رد کنید:

(آ) (۵ نمره) مجموعه توابع با دوره تناوب T زیرفضایی از $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ است.

(ب) (۵ نمره) مجموعه تمامی توابع متناوب زیرفضایی از $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ است.

(ج) (۱۰ نمره) $f_o \oplus f_e = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$

پاسخ

(آ) ادعا می‌کنیم که مجموعه مذکور، یک زیرفضا است. برای اثبات این ادعا، کافی است سه خاصیت را اثبات کنیم:

۱) هر تابعی مثل $g(x)$ به وضوح با جمع کردن با تابع متحدالصفر، همچنان برابر با $g(x)$ می‌ماند. در نتیجه تابع متحدالصفر، عضو صفر است.

۲) دو تابع متناوب $f(x)$ و $g(x)$ را در نظر بگیرید. داریم: اگر $f(x) + g(x) = h(x)$ آنگاه:

$$h(x+T) = g(x+T) + f(x+T) = g(x) + f(x) = h(x)$$

پس نتیجه می‌شود جمع هر دو تابع متناوب با دوره تناوب T یک تابع متناوب با همین دوره تناوب است.

۳) به ازای هر اسکالری مانند α و هر تابع $f(x)$ عضو مجموعه داریم: اگر $\alpha f(x) = h(x)$

$$h(x+T) = \alpha f(x+T) = \alpha f(x) = h(x)$$

پس نتیجه می‌شود ضرب یک اسکالر در هر تابعی عضو مجموعه نیز، یک تابع دیگر درون مجموعه است.

$\leftarrow$ بنابراین، با بیان و اثبات سه خاصیت بالا، مجموعه مورد نظر یک زیرفضا می‌باشد.

(ب) ثابت می‌کنیم جمع دو تابع رو به رو، تابعی متناوب نیست و از آن نتیجه می‌گیریم که مجموعه همه توابع متناوب، زیرفضا نیست.

$$sin(x),\ sin(\pi x)$$

فرض کنید جمع این دو تابع، تابعی متناوب باشد. در نتیجه داریم:

$$sinx + sin(\pi x) = sin(x+k) + sin(\pi(x+k))$$

حال اگر از عبارت بالا، دو مرتبه مشتق بگیریم داریم:

$$-sinx - \pi^2 sin(\pi x) = -sin(x+k) - \pi^2 sin(\pi(x+k))$$

که نتیجه می‌شود:

$$sin(x) - sin(x+k) = sin(\pi(x+k)) - sin(\pi x) = \pi^2(sin(\pi(x+k)) - sin(\pi x))$$

$$\to sin(\pi(x+k)) = sin(\pi x)$$

$$(x=۰) \to sin(\pi k) = sin(۰) = ۰$$

که نتیجه می‌شود، k عددی صحیح است. با جایگذاری $x = k$ در عبارت اولیه، داریم:

$$sin(k) + ۰ = sin(۲k) + ۰$$

که این عبارت به وضوح برای هیچ k ای برقرار نیست. در نتیجه به تناقض می‌رسیم و نتیجه می‌شود جمع هر دو تابع متناوبی لزوما متناوب نیست.

(ج) به وضوح مجموعه توابع فرد، یک زیرفضا و مجموعه توابع زوج نیز یک زیرفضا است. برای اثبات دایرکت سام بودن، کافی است اثبات کنیم اشتراک این دو زیرفضا تنها عضو ۰ است و همچنین هر عضوی از مجموعه تمامی توابع را می‌سازند. فرض کنید f عضو هر دو زیر فضا باشد. داریم:

$$f(x) = -f(-x),\ f(x) = f(-x) \to f(x) = -f(x) \to f(x) = ۰$$

پس خاصیت اول ثابت شد. همچنین برای هر تابع h درون فضای برداری اصلی داریم:

$$h(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{۲} + \frac{h(x)-h(-x)}{۲}$$

که به وضوح $\frac{h(x)+h(-x)}{۲}$ یک تابع زوج است و $\frac{h(x)-h(-x)}{۲}$ نیز یک تابع فرد است. پس هر تابعی، به صورت جمع یک تابع فرد و یک تابع زوج بدست آمد. بدین صورت، حکم اثبات می‌شود.

پرسش ۳ (۲۵ نمره) اثبات کنید اجتماع سه زیرفضا با مجموعه اعضای نامتناهی از V یک زیرفضا از V است اگر و تنها اگر یکی از زیرفضاها شامل دوتای دیگر باشد.

پاسخ برای حل این سوال به قضیه زیر نیاز است:

اثبات قضیه: دو زیرفضا به نام های $U_۱$ و $U_۲$ از V در نظر بگیرید.
طرف اول:

فرض کنید یکی از زیرفضاها شامل دیگری باشد. در این صورت یکی از این دو درست است: $U_۱ \cup U_۲ = U_۱$ یا ، $U_۱ \cup U_۲ = U_۲$. در هر دو حالت اجتماع زیرفضاها خود یک زیرفضا است.
طرف دوم:

فرض کنید $U_۱ \cup U_۲$ یک زیرفضا از V باشد اما هیچ کدام از زیرفضاها دیگری را شامل نشود. بنابراین $U_۱ \setminus U_۲$ و $U_۲ \setminus U_۱$ هردو ناتهی می باشند. اعضای $x \in U_۱ \setminus U_۲$ و $y \in U_۲ \setminus U_۱$ را در نظر بگیرید. ادعا می کنیم $x+y \notin U_۱$ و $x+y \notin U_۲$ که باعث می شود $U_۱ \cup U_۲$ تحت عمل جمع بسته نباشد که تناقض است، در نتیجه حکم ثابت می شود:

- فرض کنید $x+y \in U_۱$. آنگاه $(x+y) - x \in U_۱$ (به خاطر بسته بودن جمع در زیرفضاها) که تناقض است، چون y را از $U_۲ \setminus U_۱$ انتخاب کردیم.
- به طور مشابه، فرض کنید $x+y \in U_۲$. در این صورت $(x+y) - y \in U_۲$ و $x \in U_۲$ که تناقض است.

***قضیه:** اجتماع دو زیرفضا با مجموعه اعضای نامتناهی از V یک زیرفضا از V است اگر و تنها اگر یکی از زیرفضاها شامل دیگری باشد.*

***اثبات قضیه:** دو زیرفضا به نام های $U_۱$ و $U_۲$ از V در نظر بگیرید.*
طرف اول:

فرض کنید یکی از زیرفضاها شامل دیگری باشد. در این صورت یکی از این دو درست است: $U_۱ \cup U_۲ = U_۱$ یا ، $U_۱ \cup U_۲ = U_۲$. در هر دو حالت اجتماع زیرفضاها خود یک زیرفضا است.
طرف دوم:

فرض کنید $U_۱ \cup U_۲$ یک زیرفضا از V باشد اما هیچ کدام از زیرفضاها دیگری را شامل نشود. بنابراین $U_۱ \setminus U_۲$ و $U_۲ \setminus U_۱$ هردو ناتهی می باشند. اعضای $x \in U_۱ \setminus U_۲$ و $y \in U_۲ \setminus U_۱$ را در نظر بگیرید. ادعا می کنیم $x+y \notin U_۱$ و $x+y \notin U_۲$ که باعث می شود $U_۱ \cup U_۲$ تحت عمل جمع بسته نباشد که تناقض است، در نتیجه حکم ثابت می شود:

- *فرض کنید $x+y \in U_۱$. آنگاه $(x+y) - x \in U_۱$ (به خاطر بسته بودن جمع در زیرفضاها) که تناقض است، چون y را از $U_۲ \setminus U_۱$ انتخاب کردیم.*
- *به طور مشابه، فرض کنید $x+y \in U_۲$. در این صورت $(x+y) - y \in U_۲$ و $x \in U_۲$ که تناقض است.*

فرض کنید $U_۱$، $U_۲$ و $U_۳$ سه زیرفضا از V باشند.

طرف اول

ابتدا فرض کنید یکی از زیرفضاها شامل دوتای دیگر باشد. بدون از دست رفتن کلیت مساله، فرض کنید این زیرفضا $U_۳$ باشد. در این صورت داریم: $U_۲ \subseteq U_۳$ و $U_۱ \subseteq U_۳$. در نتیجه $U_۱ \cup U_۲ \cup U_۳ = U_۳$؛ پس $U_۱ \cup U_۲ \cup U_۳$ یک زیرفضا از V می شود.
طرف دوم

فرض کنید $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ یک زیرفضا از V می باشد.

اگر U_2 شامل U_3 باشد (یا برعکس)، آنگاه $W = U_2 \cup U_3$ که W یک زیرفضا از V می باشد. (طبق قضیه) حال چون $U_1 \cup W$ طبق فرض یک زیرفضا می باشد، طبق قضیه یا W شامل U_1 است یا U_1، W را شامل می شود. بنابراین در این حالت نشان دادیم حداقل یکی از زیرفضاها دوتای دیگر را شامل می شود.

حال فرض کنید U_2 و U_3 به گونه ای هستند که هیچ کدام دیگری را شامل نمی شود.

دو عضو دلخواه $x \in U_2 \setminus U_3$ و $y \in U_3 \setminus U_2$ را در نظر بگیرید و دو عدد a و b را از f نیز به گونه ای در نظر بگیرید که $a - b = 1$ (این دو عدد حتما پیدا می شوند چراکه فرض می کنیم f نامتناهی می باشد). ادعا می کنیم $ax + y$ و $bx + y$ هردو در U_1 هستند.

برای اثبات ادعا، فرض کنید این گونه نباشد. بنابراین یا $ax + y \in U_2$، یا $ax + y \in U_3$. اگر $ax + y \in U_2$، آنگاه می توان نتیجه گرفت $(ax + y) - ax = y \in U_2$ که تناقض است چراکه y را طوری انتخاب کردیم که در U_2 نباشد؛ و اگر $ax + y \in U_3$، داریم: $(ax + y) - y = ax \in U_3$ که تناقض می باشد.

به طور مشابه برای $bx + y$، اگر داشته باشیم $bx + y \in U_2$، آنگاه $(bx + y) - bx = y \in U_2$ (تناقض) و اگر $bx + y \in U_3$، آنگاه باید داشته باشیم $(bx + y) - y = bx \in U_3$ که باز هم تناقض است.

در نهایت از $ax + y \in U_1$ و $bx + y \in U_1$ می توان نتیجه گرفت: $(ax + y) - (bx + y) = (a - b)x = x \in U_1$

حال چون x یک عضو دلخواه از $U_2 \setminus U_3$ بود، و از $x \in U_2 \setminus U_3$ به $x \in U_1$ رسیدیم، نتیجه می شود $U_2 \setminus U_3 \subseteq U_1$.

با استدلالی مشابه نتیجه می شود که $x + ay$ و $x + by$ نیز باید در U_1 باشند، پس $(x + ay) - (x + by) = (a - b)y = y \in U_1$ و $U_3 \setminus U_2 \subseteq U_1$.

اگر $U_2 \cap U_3 = \emptyset$، حکم ثابت می شود. در غیر این صورت، برای هر عضو دلخواه $u \in U_2 \cap U_3$، عضو $v \in U_3 \setminus U_2 \subseteq U_1$ را در نظر می گیریم. ادعا می کنیم $u + v \notin U_2 \cap U_3$؛ چرا که در غیر این صورت $(u + v) - u = v \in U_2$ که تناقض است. (در واقع عضو اشتراک U_2 و U_3 می شود). اما از این عبارت نتیجه می گیریم که $u + v$ باید در U_1 باشد، که نتیجه می دهد $(u + v) - v = u$ هم باید در U_1 باشد. یعنی اگر $u \in U_2 \cap U_3$، آنگاه $u \in U_1$ و درنتیجه $U_2 \cap U_3 \subseteq U_1$ که اثبات را کامل می کند.

پرسش ۴ (۲۵ نمره) اگر V را بصورت تمامی دنباله‌های نامتناهی $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ تعریف کنیم که همه‌ی مقادیر a_i اعداد حقیقی هستند و $a_0 \neq 0$. با توجه به تعاریف زیر از جمع برداری و ضرب اسکالر موارد زیر را بررسی کنید:

(آ) (۱۵ نمره) خواص جمع برداری برای اینکه V فضای برداری باشد را بررسی کنید.

(ب) (۱۰ نمره) خواص ضرب اسکالر برای اینکه V فضای برداری باشد را بررسی کنید.

(جمع برداری)
$$a + b = (a_0 b_0,\ a_0 b_1 + a_1 b_0,\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2,\ \ldots) \quad or \quad (a+b)_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}$$

(ضرب اسکالر)
$$ka = (ka_0, ka_1, ka_2, \ldots)$$

پاسخ

(آ) هر عضو از مجموعه V را می‌توان به صورت زیر به یک سری توانی تبدیل کرد:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

همچنین می‌توان هر سری توانی که جمله اول آن (a_0) مخالف صفر باشد را به یک عضو از V تبدیل کرد:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \rightarrow (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

پس می‌توان بین اعضای V و مجموعه کل سری‌های توانی که جمله اولشان ناصفر است، یک تناظر یک به یک برقرار کرد. اگر فرض کنیم معادل سری توانی دو بردار a و b به ترتیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ باشد، معادل سری توانی بردار $a + b$ می‌شود:

$$a + b = (a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \ldots, \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}, \ldots) \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}) x^j$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}) x^j &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3)x^3 + \ldots \\
&= (a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + a_0 b_3 x^3 + \ldots) + (a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + \ldots) + (a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + \ldots) + \ldots \\
&= a_0 (b_0 + b_1 x +_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots) + a_1 x (b_0 + b_1 x +_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots) + a_2 x^2 (b_0 + b_1 x +_2 x^2 + \ldots) + \ldots \\
&= a_0 g(x) + a_1 x g(x) + a_2 x^2 g(x) + \ldots = g(x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = f(x) g(x)
\end{aligned}$$

پس جمع کردن دو بردار از V معادل ضرب کردن سری توانی آن دو بردار است. با کمک این نکته، خواص جمع برداری را بررسی می‌کنیم.

۱. بسته بودن: از آنجایی که $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ و $a_۰, b_۰ \neq ۰$، داریم $\sum_{i=۰}^{j} a_i b_{j-i} \in \mathbb{R}$ و $a_۰ b_۰ \neq ۰$ بنابراین، $a + b \in V$ و بسته بودن جمع برداری ثابت شد.

۲. جابه‌جایی پذیری: طبق نتیجه‌ای که در بالا به دست آمد داریم:

$$a + b \to f(x)g(x) = g(x)f(x) \leftarrow b + a$$

چون بین اعضای V و مجموعه سری‌های توانی که عضو اول ناصفر دارند تناظر یک به یک برقرار است، نتیجه می‌گیریم $a + b = b + a$ و خاصیت جابه‌جایی پذیری اثبات شد.

۳. اشتراک پذیری: اگر $a, b, c \in V$ سه بردار دلخواه باشند و سری توانی معادل آن‌ها به ترتیب $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ باشند، داریم:

$$(a + b) + c \to (f(x) \times g(x)) \times h(x) = f(x) \times (g(x) \times h(x)) \leftarrow a + (b + c)$$

پس مشابه استدلالی که در بالا داشتیم، نتیجه می‌گیریم $(a + b) + c = a + (b + c)$ بنابراین خاصیت اشتراک پذیری نیز برقرار است.

۴. وجود عضو خنثی: می‌دانیم در ضرب توابع، تابع یک در هر تابعی ضرب شود، حاصل همان تابع می‌شود. بنابراین در جمع برداری، برداری که معادل با تابع یک است عضو خنثی است.

$$\forall f : ۱ \times f(x) = f(x) \times ۱ = f(x) \Rightarrow \forall a \in V : (۱, ۰, ۰, ...) + a = a + (۱, ۰, ۰, ...) = a$$

پس بردار $(۱, ۰, ۰, ۰, ...)$ عضو خنثی جمع است.

۵. وجود وارون جمع: می‌دانیم برای هر تابع مانند $f(x)$، وارون آن مساوی است با $\frac{۱}{f(x)}$. برای اینکه این خاصیت را ثابت کنیم، باید نشان دهیم اگر $f(x)$ یک سری توانی با جمله اول ناصفر باشد، $\frac{۱}{f(x)}$ را نیز می‌توان به صورت یک سری توانی با جمله اول غیر صفر نوشت. برای سری‌های هندسی می‌دانیم:

$$\sum_{i=۰}^{\infty} x^i = \frac{۱}{۱ - x}$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$f(x) = \sum_{i=۰}^{\infty} a_i x^i \Rightarrow \frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{a_۰ - (a_۰ - f(x))} = \frac{۱}{a_۰(۱ - (۱ - \frac{f(x)}{a_۰}))} = \frac{۱}{a_۰} + \frac{۱}{a_۰} \sum_{i=۱}^{\infty} (۱ - \frac{f(x)}{a_۰})^i$$

از آنجایی که $f(x)$ خودش یک سری توانی است، و $a_۰ \neq ۰$ است، عبارت بالا نیز یکی سری توانی می‌شود. بنابراین، $\frac{۱}{f(x)}$ را نیز می‌توان به صورت یک سری توانی نوشت. همچنین از آنجایی که جمله اول یک سری توانی را می‌توان با جایگذاری $x = ۰$ در سری به دست آورد، نتیجه می‌گیریم که جمله اول سری توانی بالا، مساوی با $\frac{۱}{a_۰}$ می‌شود که مخالف صفر است. پس برای آن یک بردار معادل در V وجود دارد.
نکته: سری توانی معادل بردارهایی که در این بخش نوشتیم، ممکن است به ازای برخی از x ها تعریف نشده باشند. اما همه آن ها در $x = ۰$ تعریف شده اند، بنابراین ضرب آن‌ها نیز در $x = ۰$ نیز تعریف شده است، پس ضرب آن‌ها وجود خارجی دارد و می‌توان برایش معادل برداری نوشت. به شیوه مشابهی نیز می‌توان گفت که چون سری توانی به دست آمده برای وارون جمع بردارها نیز در $x = ۰$ تعریف شده، پس وجود خارجی دارد و می‌توان برایش معادل برداری نوشت.

(ب) یکی یکی خواص ضرب اسکالر را بررسی می‌کنیم:

۱. بسته بودن: این خاصیت برقرار نیست، زیرا اگر بگیریم $k = ۰$، داریم:

$$ka = k(a_۰, a_۱, a_۲, ...) = (ka_۰, ka_۱, ka_۲, ...) = (۰ \times a_۰, ۰ \times a_۱, ۰ \times a_۲, ...) = (۰, ۰, ۰, ...) \notin V$$

۲. شرکت پذیری:

$$(km)a = ((km)a_۰, (km)a_۱, (km)a_۲, ...) = (k(ma_۰), k(ma_۱), k(ma_۲), ...) = k(ma_۰, ma_۱, ma_۲, ...) = k(ma)$$

پس خاصیت شرکت پذیری برقرار است.

۳. توزیع پذیری: اگر معادل سازی سری توانی را روی ضرب اسکال انجام دهیم، داریم:

$$ka = (ka_۰, ka_۱, ka_۲, ...) \to \sum_{i=۰}^{\infty} ka_i x^i = k \sum_{i=۰}^{\infty} a_i x^i = kf(x)$$

بنابراین، ضرب اسکالر بردارها معادل ضرب کردن سری توانی در k است. بنابراین:

$$(scalar\ addition) \qquad (k + m)a \to (k + m)f(x) = kf(x) + mf(x) \neq kf(x) \times mf(x) \leftarrow ka + ma$$

$$(vector\ addition) \qquad k(a+b) \rightarrow k(f(x) \times g(x)) = kf(x)g(x) \neq (kf(x))(kg(x)) \leftarrow ka+kb$$

پس خاصیت توزیع پذیری برقرار نیست.

۴. وجود عضو خنثی: اگر $k = ۱$ را درنظر بگیریم، داریم:

$$۱a = (۱ \times a_۰, ۱ \times a_۱, ۱ \times a_۲, ...) = (a_۰, a_۱, a_۲, ...) = a$$

پس برای ضرب اسکالر عضو خنثی وجود دارد.